

數位典藏在科技教育上的應用—創意教案三

壹、主題：比例規

貳、構想概要：

以比例規為主題，將高中生活科技課程活動設計成一個 MST 的教學模式，使學生了解到，計算工具的應用與發展，並設計一個動手作比例規的創意活動，以激發高中生創造力。

比例規是伽利略(Galileo Galilei, 1564-1642)於 1597 年起，雇請工匠製造發賣他所發明的比例規(Sector or Compass)，此器原本用於估計各不同砲種和口徑之大砲，在使用不同材質之砲彈時，所應裝填的火藥量，經略加改進後，更成為解決當時常見代數或幾何問題的簡便計算尺。

在數學方面：讓學生進行比例的換算、求平方、平方根、立方、立方根、均分線段為五等分等。

在科學方面：讓學生了解火炮發射的原理、射角、射速與射程的關係。

在科技方面：讓學生了解比例規於火炮上的應用，以及還有那些尺規在生活上的應用。

在社會方面：引導學生對各類度量工具對社會文化的影響。

參、數位典藏現有資料：

一、火器與明清戰爭



一把小小的尺，和大砲有著密切的關係。這把小小的尺，就是比例規。什麼是比例規呢？比例規與大砲有什麼關係呢？

在右圖的白鬍子老爺爺手裡拿的三角狀物，就是由伽利略(Galileo Galilei, 1564-1642) 所發明的比例規 (Sector or Compass)。

1597 年，伽利略發明了比例規，並且僱請工匠製造及販賣比例規。比例規最早用來估計大砲應該填裝多少的火藥量。不同砲種和口徑的大砲，在使用不同材質的砲彈時，所應填裝的火藥量也不同。

後來比例規經過稍微改良，更成為解決代數與幾何問題的簡便計算尺。

在這個展覽中，讓我們一起來認識比例規在砲學上的運用，一探小尺與大砲的關係！！

早在十三世紀的時候，中國就發明了火砲。明代軍隊作戰時，已有使用火砲。奇怪的是，明代之前的兵學書籍裡，都沒有提到火砲裝彈填藥的要領，這些知識全憑口耳相傳。



※資料來源：Guns: An Illustrated History of Artillery, New York: New York Graphic Society Limited, 1971.

十六、七世紀時，火砲主要拿來攻城，常見的砲彈是用鉛、鐵或石頭做成的實心圓球。各國所用的火砲規格相當混亂，共有大鳩銃 (Cannon)、半鳩銃 (Demi-cannon)、大蛇銃 (Culverin)、半蛇銃 (Demi-culverin) 等十餘種，不同國家對砲種的定義也不同，即使是同一個國家也不會完全標準化。例如西班牙用的大鳩銃，就分成 30、35、40、45 或 50 磅鐵彈等多種樣式呢！

附註：

銃 ㄉㄨㄥˋ 古代用火藥發射彈丸的管形火器。也就是火砲。



經過實際的測試之後，當時的鑄砲者發現，每門砲所要裝填的藥彈重量比，會因為砲種的不同而有很大的變化。且彈藥之間必須有一定的比例，這就是所謂的「彈藥相稱」。假如用藥過多，不但浪費且有可能爆炸。相反的，假如用藥過少，砲彈的運動會受到管壁的阻礙而威力衰減。

由於砲彈的材質（也就是重量），常因環境限制而有所改變，而操作大砲的人因為經濟考量，及減少發射時的後座力，對於較輕的砲彈，往往裝填較少的火藥，使砲彈離開砲管的初速維持定值。如此一來就不需要改變射程測定表，來維持砲彈的準度了。

崇禎五年彭氏原領川兵防守旅順，非常具有戰鬥經驗，入城之後，馬上訂定每個砲填藥的多寡，並且

接下來要介紹的是火藥與砲彈之間的比例關係。依照物理與化學的常識，在砲彈初速維持不變的情形下，火藥與砲彈之間的關係如下：

$$\text{火藥重量} \propto \text{砲彈重量} \propto \text{砲管口徑}^3 \propto \text{砲彈密度}$$

火藥量大致與砲彈重量成正比。

火藥量與砲管口徑的三次方成正比。

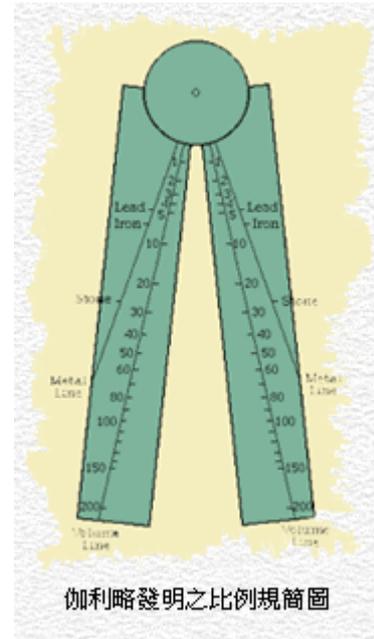
火藥量與砲彈的密度成正比。

因此各銃尺在某一點上所刻劃的火藥重量值，應與銃規零點至該點距離的三次方成正比。而三條銃尺上刻劃相同藥重之點至零點的距離，則與砲彈密度的三分之一方成反比。

將火藥用紙包起來，每斤一包，如此在急忙中便不會有差錯。紅夷大砲在裝填火藥時，還很有講究，例如在用撞藥杖將火藥塞實的時候，不可以太緊，否則會因缺氧而產生悶燒的現象。這時就得將砲彈取出，再以裝藥鏃將藥粒弄鬆，但在弄鬆的時候，往往會因為火藥迅速燃燒，而將藥鏃轟開，危險性相當高。在兩次發射間，砲手必須用洗銃帚將殘留砲管灰燼清理乾淨。若餘燼尚存，則容易在裝填新藥時引發爆炸傷人的慘劇。誰能說火藥裝填不是一門攸關性命的大學問呢？

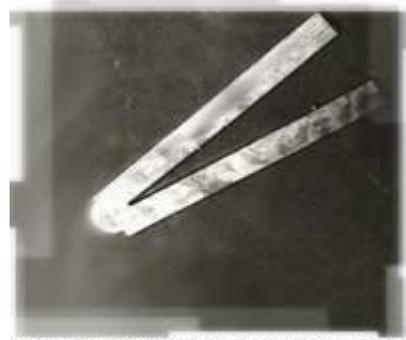
因為藥彈的重量比例不一，所以各砲種所用的銃尺應該不同。前面提過，當時的火砲樣式非常的多，銃尺上的刻畫也得隨之更改，相當的麻煩。因此在 1597 年時，伽利略專為火砲量身打造了一把萬用小尺，也就是比例規。這把小尺除了砲學上的應用，也可以解決許多代數或幾何問題。在伽利略所寫的比例規操作手冊中，第一篇就是「裝填問題 (Problem of Caliber)」，解說如何用銃尺解決某些數學問題。

比例規的發明，可使一個未受嚴格數學訓練的砲手，在半分鐘之內求得同一砲種，但不同砲口、不同材質砲彈之砲的火藥量。當時一般精通數學之人，如以筆算的話，可能得花上十分鐘呢！



伽利略發明之比例規簡圖

中、外文獻中，很少討論到比例規在砲學上的應用。中文文獻中，最早提到比例規的，是耶穌會士羅雅谷 (Jacques Rho, 1592-1638) 在崇禎三年 (1630) 所撰寫的《比例規解》一書。羅氏在自序中稱此器「百種技藝，無不賴之，功倍用捷，為造瑪得瑪第嘉之津梁」，其中「瑪得瑪第嘉」應該就是「數學 (Mathematica)」一詞的音譯。



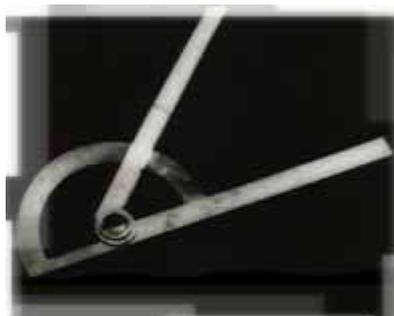
×北京故宮博物院所藏的各種比例規

這本書後來被收入《崇禎曆書》和《西洋新法曆書》中，並在康熙 (1662-1722)、雍正 (1723-1735) 間吸引了許多學者的注意。例如《御製數理精蘊》中所收的《比例規解》同名書，梅文鼎《曆算全書》中所收其弟文鼎的《比例規用法假如》，以及何夢瑤《算迪》中所收的《比例尺解》等，都是引伸和演繹自羅雅谷的書。

有關比例規在中國的實際使用情形，文獻中少有記載。我們只知道，梅文鼎在康熙十八年曾經為友人何奕美，製作了一個比例規。在北京的故宮博物院裡，還可以見到多種比例規的實物留存，其中有的為歐洲製造，有的為仿製品，可能多為康熙皇帝的御用之物。

有關比例規的基本原理和用法，在《御製數理精蘊》中有相當簡明的敘述，其文曰：

比例尺代算，凡點線面體、乘除開方，皆可以規度而得。然於畫圖製器，尤所必需，誠算器之至善者焉！究其立法之原，總不越乎同式三角形之比例，蓋同式三角形，其各角、各邊皆為相當之率，今張尺之兩股為三角形之兩腰，其尺末相距即三角

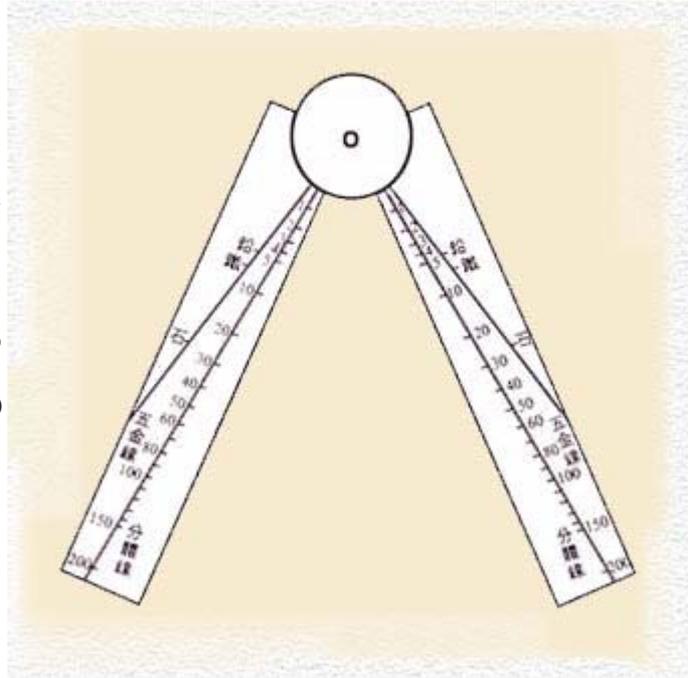


北京故宮博物院所藏各種比例規

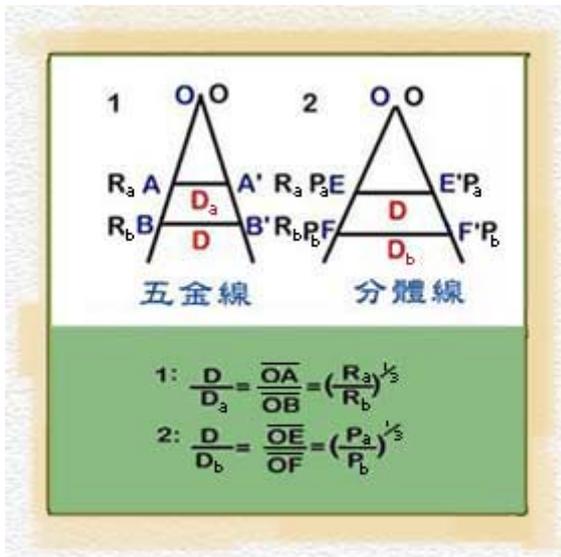
形之底，遂成兩邊相等之三角形，於中任截兩邊相等之各三角形，則其各腰之比例，必與各底之比例相當也。一曰：平分線，以御三率。一曰：分面線，一曰：更面線，以御面幕。一曰：分體線，一曰：更體線，以御體積。一曰：五金線，以御輕重。一曰：分圓線，一曰：正弦線，一曰：正切線，一曰：正割線，以御測量，併製平儀諸器。凡此十線，或總歸一器，或分為數體，任意為之，無所不可。

我們來試舉一個例子，看看如何用比例規解決裝填彈藥的問題。

已知一火砲（內徑為 D_a ），使用密度為 R_a （物質甲）的砲彈（重量為 M_a ），需裝填火藥量 P_a 。求一內徑為 D_b 的同類型砲，在使用密度為 R_b （物質乙）的砲彈（重量為 M_b ）時，所需的火藥量 P_b 應為何？

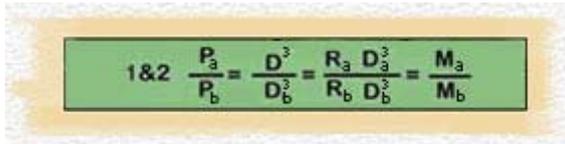


我們可以用到股上的五金線和分體線兩尺，其中五金線上各點距原點的長度，乃與其所代表物質（如金、鉛、銀、銅、鐵、錫、石等）之密度的三分之一次方成反比，至於分體線上各點之值，則與其距原點長度的三次方成正比。



實際的操作可分成兩個階段，首先，估計一重量為 M_a 之砲彈，如其重量不變，但密度改為 R_b 時，直徑 D 應為何？砲手可以在比例規的兩五金線上擇定代表物質甲之 A 和 A' 點，然後張開兩股，令 AA' 的長度等於 D_a 長，此一量度可用一個簡單的圓規來測量。接著，將該圓規從代表物質乙之 B 點張至 B' 點，如此求得的 BB' 長度即為 D 值。

其次，解答下列問題：一直徑為 D 、密度為 R_b 之砲彈，已知需填用火藥量 P_a ，若改用一不同口徑的同類型大砲，該砲使用直徑為 D_b 、密度為 R_b 之砲彈，求所需的火藥量 P_b 應為何？砲手可從兩分體線上選取 E 和 E' 兩點，令其在線上的讀數分別為 P_a ，次張開兩股，令 EE' 的長度恰等於先前圓規所張之長，再調整圓規所張之長度為 D_b ，並在尺上擇取 F 和 F' ，令 FF' 的長度等於圓規所張之 D_b ，則點 F 或 F' 在兩分體線上的數值，即為所欲求的火藥量 P_b 。


$$1&2 \frac{P_a}{P_b} = \frac{D_a^3}{D_b^3} = \frac{R_a D_a^3}{R_b D_b^3} = \frac{M_a}{M_b}$$

在五金線和分體線上的兩階段測量，分別滿足上列第一和第二公式。而經整理合併後的最後一個等式中，我們已代入兩砲彈徑與內徑之比相同的假設。此公式就是

求解「裝填問題」的理論基礎（不考慮空氣阻力影響），反映出同類型火砲所需填裝的藥量與彈重是成正比的。

雖然伽利略發明比例規，原先的用意是代替銃尺，測量彈藥量之用，但因為以下的因素，使得比例規在砲學上的用處漸漸不受重視。

第一、改裝費時。

伽利略所發明的比例規，原來還外附有一個直角圓弧，兩端可用螺絲固定在比例規的兩股之上，此外還附了一權，可用線繫於該規的原點。如此一來，比例規就可以轉變成銃規，用以測量砲管的仰角。但此一改裝頗為費時，在分秒必爭的戰場上，可能並不切實際。

第二、操作方式複雜。

由於不同砲種所附銃尺的刻劃均不相同，因此適用範圍較為廣泛的比例規，理論上將使銃尺遭到淘汰的命運，然而，實際的情形並非如此。這是因為比例規的操作方法遠較銃尺複雜，而當時的砲手通常受教育不多，很少有人能夠善用比例規，到後來僅流於歐洲富有貴族或軍官的賞玩之物。

第三、轉變成解決數學問題的工具。

後來伽利略將比例規改良擴充成一多用途的計算工具，其在火砲上的應用，不再受到特別重視。因此，當伽利略於 1606 年刊行《幾何和軍事用之比例規的操作法 (Le operazioni del Compasso Geometrico et Militare) 》時，「裝填問題」就沒有再被列在書裡。至於中國方面，或許因為相同的理由，導致明季以來的中文文獻中，完全沒有提到比例規在砲學上的應用。

在比例規發明之前，人們用銃尺來測量大砲應裝填的火藥量。

十六世紀歐洲的火砲製造者，發明了銃尺，用來判斷不同材質的圓彈應該填裝的火藥量。砲手不需要複雜的計算，就可輕輕鬆鬆地估計屬於某一特定砲種的裝藥量。



銃尺通常刻有分別標明為鐵、鉛或石的三條非線性尺。使用時先依砲彈的材質選取相應的尺，再將尺的零點對準砲管的內壁，沿著砲口某一直徑方向，讀出內壁另一端所交銃尺的刻劃。所測量出來的值，就是應該裝填的火藥重量。銃規 (Squadra) 等砲手常用的儀具之上，常可以見到附刻有此類銃尺。